

CAPITOLUL 8

CRITERII DE RUPERE ÎN MODUL MIXT DE SOLICITARE

-
- 8.1. Direcția de propagare a fisurii în modul mixt de solicitare
 8.2. Criterii empirice pentru ruperea în modul mixt
 8.3. Condiții pentru propagarea fisurii în modul mixt
 8.4. Densitatea energiei de deformare
 8.5. Exemple de aplicare a criteriului densității de energie
 8.6. Relația între energia liberă și factorul de intensitate a tensiunilor în cazul propagării necoplanare a unei fisuri în modul de solicitare mixt
 8.7. Generalizarea conceptului de tenacitate la rupere a materialelor fragile supuse tensiunilor multiaxiale
-

8.1. Direcția de propagare a fisurii în modul mixt de solicitare

S-a constatat anterior că, dacă solicitarea are loc în *modul I*, ruperea se produce atunci când coeficientul de intensitate a tensiunii atinge valoarea critică K_{Ic} . În cazul în care solicitarea are loc astfel încât nici unul din modurile de solicitare prezentate anterior nu este exclusiv, ne putem întreba care sunt criteriile de rupere sau de instabilitate ce se pot utiliza? Au fost propuse mai multe asemenea criterii, fără a se aplica vreunul în exclusivitate.

În cazul în care solicitarea are loc astfel încât predomină modurile I și II, Erdogan și Sih, [64], au făcut următoarele ipoteze:

- Fisura se propagă în direcția în care tensiunea σ_θ este maximă;
- Fisura este instabilă atunci când:

$$\sigma_{\theta \max} \sqrt{2\pi} = K_{Ic} \quad (8.1)$$

În coordonate polare, *figura 8.1*, tensiunile sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + 2K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right] \frac{\theta}{2} \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \sin \frac{\theta}{2} + K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right] \end{aligned} \quad (8.2)$$

σ_θ este maximă pentru $\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0$ adică pe o direcție θ_0 care va fi direcția de propagare dată de relația:

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (8.3)$$

Se poate remarca faptul că, în direcția θ_0 tensiunea de forfecare va fi egală cu zero – $\tau_{r\theta}=0$. Valoarea astfel obținută pentru θ_0 se înlocuiește în relația (8.1) obținându-se o relație la instabilitate între K_I , K_{II} și K_{Ic} care va constitui *criteriul de rupere în modul mixt*:

$$\cos \frac{\theta_0}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0 \right] = K_{Ic} \quad (8.4)$$

Atunci când solicitarea este în *modul II* pur ($K_I=0$), vom avea:

$$\begin{cases} \theta_0 = \arccos \frac{1}{3} = 70,5^\circ \\ K_{IIc} = 0,87 K_{Ic} \end{cases} \quad (8.5)$$

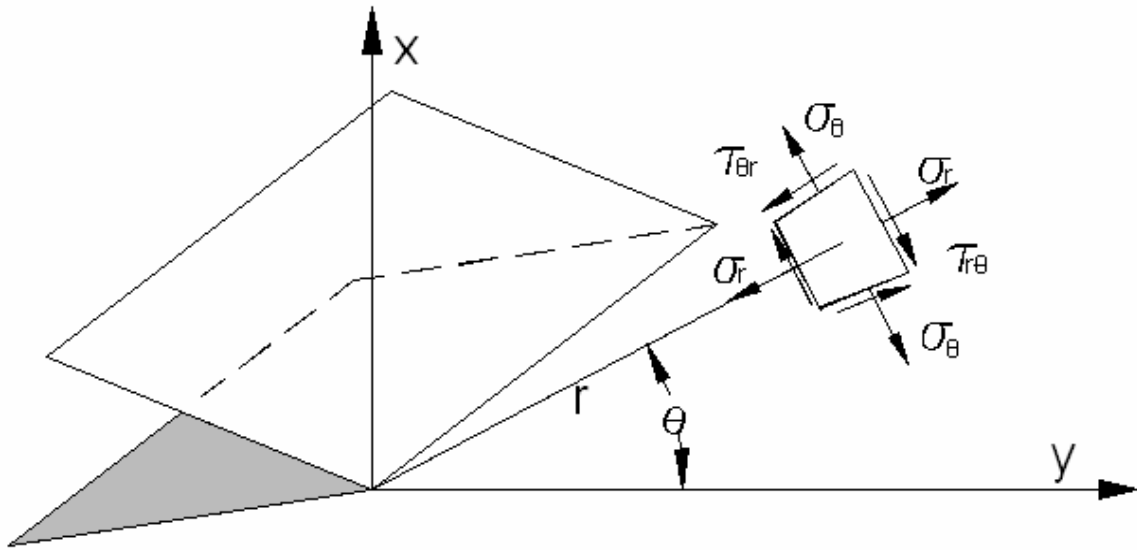


Fig.8.1. Starea de tensiuni de la vârful fisurii

În modul mixt de solicitare, criteriul lui Griffith trebuie să indice faptul că fisura se va propaga în direcția în care cantitatea de energie eliberată pe unitatea de lungime este maximă și fisura va fi instabilă dacă această cantitate de energie atinge o valoare critică. Ipotezele făcute anterior încearcă să prefigureze tocmai aceste lucruri.

8.2. Criterii empirice pentru ruperea în modul mixt

Au fost propuse și relații empirice pentru a descrie ruperea în modul mixt. De exemplu criteriul lui Palaniswamy și Knaus, [69]:

$$\frac{K_I}{K_{Ic}} + \frac{3}{2} \left(\frac{K_{II}}{K_{Ic}} \right)^2 = 1 \quad (8.6)$$

care dau pentru *modul II* de solicitare relația $K_{II}=0,82 \cdot K_{Ic}$, asemănătoare cu criteriul lui Erdogan și Sih, [64]. În cazul oțelurilor de înaltă rezistență, Sih a propus următoarea relație:

$$K_I + K_{II} = K_{Ic} \quad (8.7)$$

care pentru *modul II* conduce la relația: $K_{II}=K_{Ic}$.

Verificarea experimentală a acestor criterii se face cu ajutorul unei plăci având o fisură înclinată în raport cu axa de solicitare, *figura 8.2*. Pe fisură se exercită următoarele forțe:

$$N = \sigma \sin^2 \beta$$

$$T = \sigma \sin \beta \cos \beta$$

Pentru o placă cu dimensiuni mult mai mari decât dimensiunea fisurii avem:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \sin^2 \beta$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \sin \beta \cos \beta \quad (8.8)$$

Pentru unghiul $\beta \rightarrow 0$ devine predominant modul II de rupere.

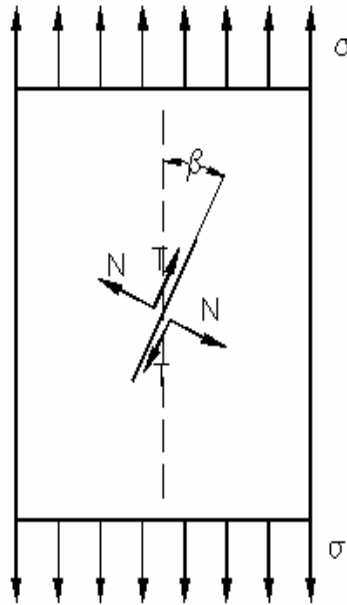


Fig. 8.2. Solicitarea fisurii în modul mixt

8.3. Condiții pentru propagarea fisurii în modul mixt

Orientarea preferențială a propagării fisurii este cea care maximizează descreșterea energiei totale a sistemului, adică $G = 2\gamma_s$. Energia totală a sistemului este egală cu:

$$W = W_E + W_\gamma - L$$

în care avem:

W_E – energia de deformație elastică înmagazinată;

W_γ – energia superficială;

L – lucrul mecanic al forțelor exterioare.

$$dW = (-G + 2\gamma_s) dC$$

Considerăm o fisură aflată în stare plană de deformare a cărei propagare are loc într-un plan oarecare în raport cu planul său inițial, *figura 8.3*.

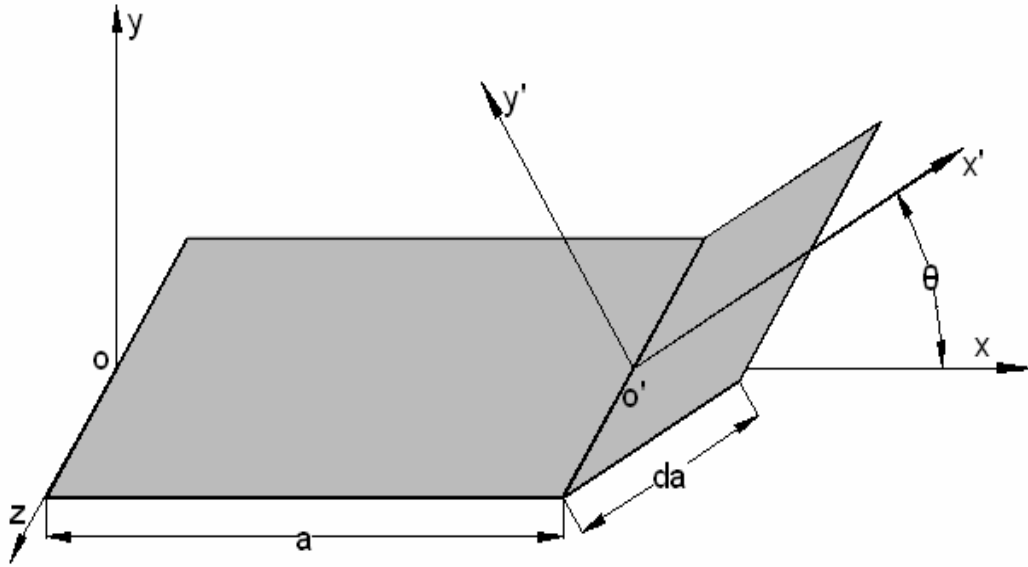


Fig. 8.3. Propagarea fisurii în modul mixt

În cazul solicitării în modul I, tensiunile din noul plan $x'o'y'$ sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned}\sigma_{y'} &= \sigma_{\theta}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{\theta}^I = \frac{K_I'(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} \\ \tau_{x'y'} &= \tau_{r\theta}^I = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{r\theta}^I = \frac{K_{II}'(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} \\ \tau_{x'z'} &= \tau_{rz}^I = 0 = \frac{K_{III}'(\theta)}{\sqrt{2\pi r}}\end{aligned}\quad (8.9)$$

unde σ_{θ}^I , $\tau_{r\theta}^I$ și τ_{rz}^I sunt tensiunile în coordonate polare datorate fisurării în primul sistem de axe. $\sigma_{y'}$ corespunde *modului I* de solicitare în raport cu noul plan, $\tau_{x'y'}$ corespunde *modului II* iar $\tau_{x'z'}$ *modului III*. Factorii f_{θ}^I și $f_{r\theta}^I$ sunt termenii $f_{ij}(\theta)$ care intervin în expresia tensiunilor date pentru *modul I* de solicitare. Astfel, se obțin factorii de intensitate a tensiunilor transformați pentru noul plan:

$$K_I'(\theta) = K_I f_{\theta}^I; \quad K_{II}'(\theta) = K_{II} f_{r\theta}^I; \quad K_{III}'(\theta) = 0$$

Ca urmare, în cazul stării plane de deformare (plăci groase) avem următoarea relație între G și K :

$$G = \frac{K_I^2(1-\nu^2)}{E} + \frac{K_{II}^2(1-\nu^2)}{E} + \frac{K_{III}^2(1+\nu^2)}{E} \quad (8.10)$$

Cantitatea de energie disponibilă pentru propagarea fisurii va fi:

$$G(\theta) = \frac{K_I'^2(1-\nu^2)}{E} + \frac{K_{II}'^2(1-\nu^2)}{E} \quad (8.11)$$

Variația $G(\theta)/G(0)$ în raport cu θ este trasată în *figura 8.4*. Pentru $\theta=0$, $G(\theta)$ prezintă un maxim.

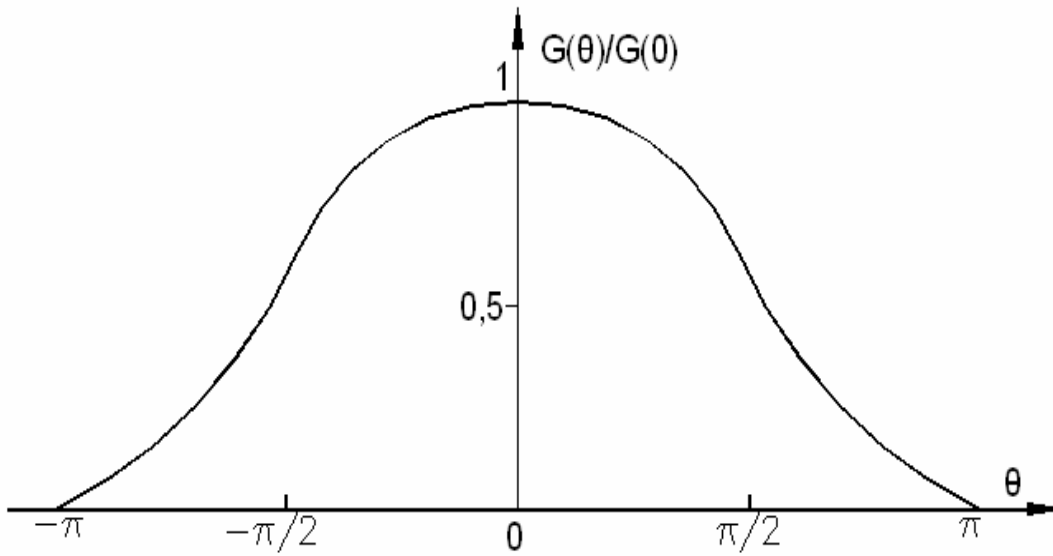


Fig. 8.4. Variația $G(\theta)/G(0)$ în raport cu θ

Se poate concluziona că, în cazul solicitării în *modul I* pur, fisura are tendința să se propage în planul său inițial. În cazul în care modul de forfecare este suprapus peste *modul I*, raționamentul este identic dar trebuie ținut cont de distribuția în *modul II* a componentelor tensiunilor, respectiv σ_y , τ_{xy} și τ_{xz} . Factorii de intensitate a tensiunii astfel transformați sunt:

$$\begin{aligned} K'_I(\theta) &= K_I f'_\theta + K_{II} f''_\theta \\ K'_{II}(\theta) &= K_I f'_{r\theta} + K_{II} f''_{r\theta} \\ K'_{III}(\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (8.12)$$

Introducând primii doi termeni ai relației (8.13) în relația (8.12) se poate determina $G(\theta)$ ca în *figura 8.5*. Se constată faptul că, efectul *modului II* este de deviere a fisurii în afara planului său inițial ceea ce reprezintă o instabilitate direcțională.

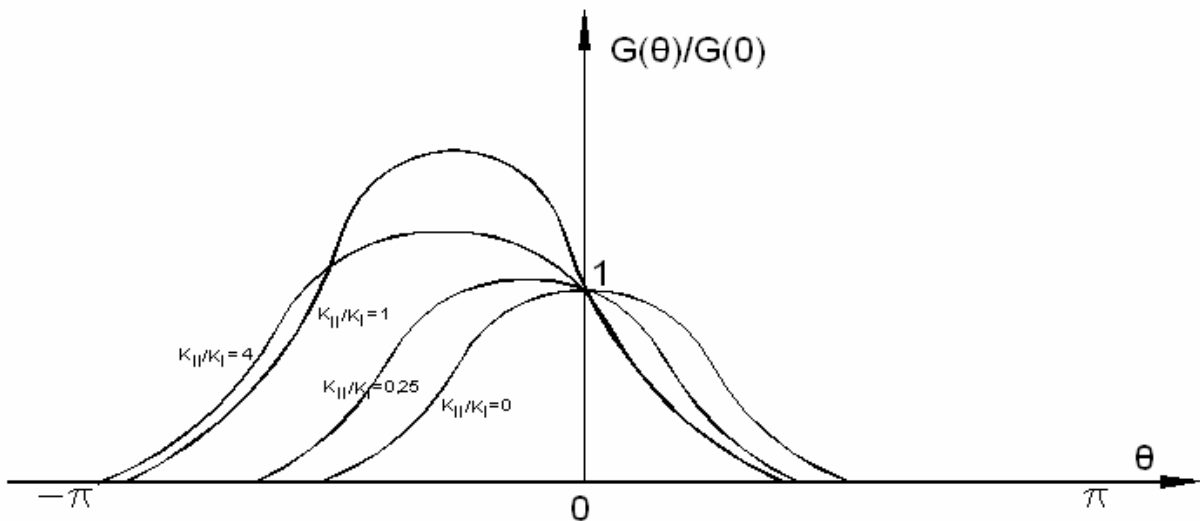


Fig. 8.5. Variația $G(\theta)/G(0)$ în raport cu θ

8.4. Densitatea energiei de deformare

Criteriile precedente privesc problemele plane. Când coexistă toate trei modurile se poate utiliza criteriul lui Sih [272] bazat pe densitatea energiei de deformare.

Considerăm un element de arie dA situat în apropierea vârfului fisurii, *figura 8.6*.

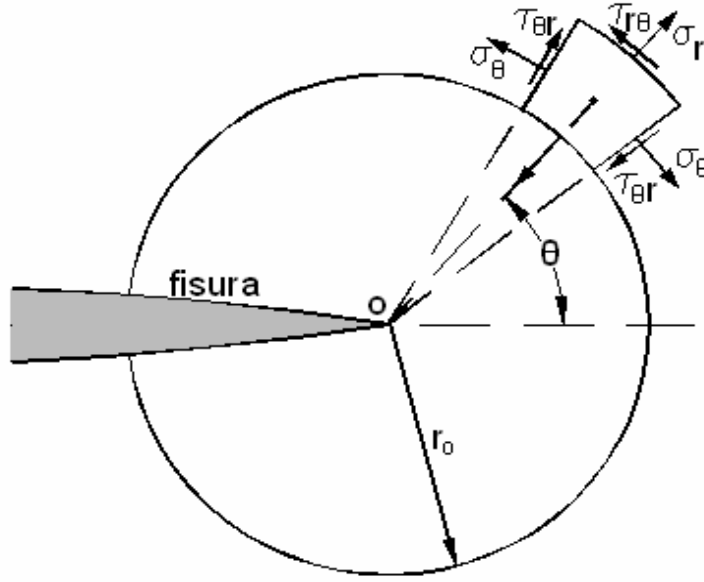


Fig. 8.6. Distribuția tensiunilor în vecinătatea vârfului fisurii

Energia de deformare înmagazinată în acest element este egală cu:

$$dW = \frac{1}{2} (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \tau_{r\theta} \gamma_{r\theta}) dA \quad (8.13)$$

$$dA = r d\theta dr$$

Densitatea energiei de deformare locală este:

$$W(r, \theta) = \frac{dW}{dA}$$

Se poate arăta că $W(r, \theta)$ este dat prin următoarea relație:

$$\frac{dW}{dA} = \frac{1}{r} (a_{11} K_1^2 + 2a_{12} K_1 K_2 + a_{22} K_2^2 + a_{33} K_3^2) \quad (8.14)$$

unde:

$$\bullet \quad \begin{cases} a_{11} = \frac{1}{16G^*} (1 + \cos \theta)(k - \cos \theta) \\ a_{12} = \frac{1}{16G^*} \sin \theta [2 \cos \theta - (k - 1)] \\ a_{22} = \frac{1}{16G^*} [(k + 1)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1)] \\ a_{33} = \frac{1}{16G^*} \end{cases}$$

- G^* este modulul de elasticitate transversal;

- $k = 3 - 4\nu$ pentru starea plană de deformății;
- $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ pentru starea plană de tensiuni.

Se definește factorul *densității energiei de deformăție*, S , prin relația:

$$S = r \frac{dW}{dA} = a_{11}K_1^2 + 2a_{12}K_1K_2 + a_{22}K_2^2 + a_{33}K_3^2 \quad (8.15)$$

Densitatea energiei de deformăție prezintă o discontinuitate în punctul $r=0$ și ca urmare se va lua în considerare doar materialul situat în exteriorul unui contur de rază r_0 , *figura 8.6*.

Se fac următoarele ipoteze:

1. Inițierea fisurii urmează o direcție θ_0 astfel încât factorul densității energiei de deformăție să fie minim:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0 \quad -\pi < \theta_0 < \pi \quad (8.16)$$

2. Instabilitatea se produce atunci când factorul densității de energie atinge o valoare critică S_{cr} (pentru $\theta=\theta_0$) caracteristică fiecărui material. Valoarea lui S_{cr} poate fi obținută considerând *modul I* pur. Vom avea:

$$S = a_{11}k_1^2 = \frac{1}{16G^*}(1 + \cos \theta)(k - \cos \theta)K_1^2; \quad K_1^2 = \frac{K_I}{\pi}$$

Relația (8.16) este satisfăcută pentru $\theta_0=0$ și atunci, pentru o stare plană de deformății vom avea:

$$S_{\min} = \frac{1-2\nu}{4\pi G^*} K_I^2$$

La instabilitate se obține:

$$S_{\min} = S_{cr} = \frac{1-2\nu}{4\pi G^*} K_{Ic}^2 \quad (8.17)$$

Se remarcă faptul că, cu toate că S_{cr} este legat matematic de K_{Ic} , cele două concepte sunt diferite. Criteriul S presupune că ruperea are loc atunci când densitatea energiei de deformăție într-un element de volum aflat aproape de vârful fisurii atinge o valoare critică în timp ce criteriul K_{Ic} este bazat pe un echilibru energetic global.

8.5. Exemple de aplicare a criteriului densității de energie

Propagarea unei fisuri solcitate în modul I, figura 8.7

În acest caz avem următoarele relații:

$$K_1 = \sigma\sqrt{a}; \quad K_2 = 0$$

$$S = a_{11}K_1^2 = a_{11}\sigma^2 a = \frac{\sigma^2 a}{16G^*} [(1 + \cos \theta)(k - \cos \theta)]$$

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \rightarrow \sin \theta [2 \cos \theta - (k - 1)]$$

ultima ecuație fiind satisfăcută pentru $\theta=0$ sau $\cos \theta = \frac{k-1}{2}$ unde $k \leq 3$.

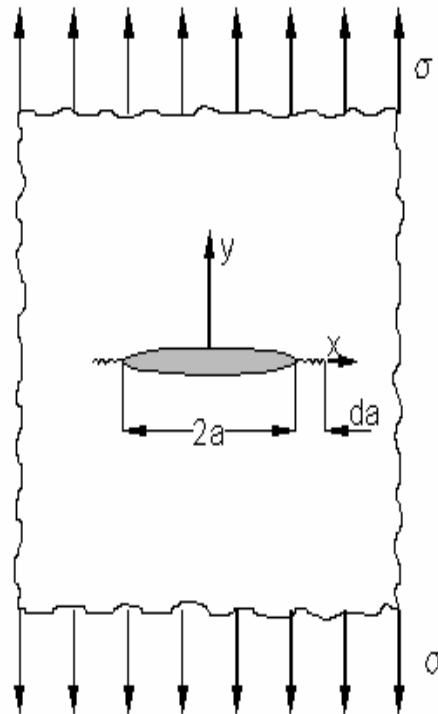


Fig. 8.7. Modul I de sollicitare

Valoare minimă a lui S se obține pentru $\theta=0$ ceea ce semnifică faptul că fisura se propagă urmând axa x , și ca urmare vom avea:

$$S_{\min} = \frac{(k-1)\sigma^2 a}{8G^*}$$

Propagarea unei fisuri solicate în modul II, figura 8.8

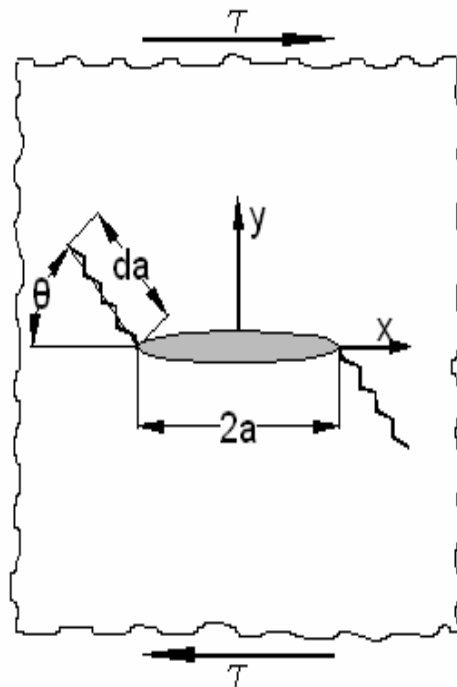


Fig. 8.8. Modul II de sollicitare

În acest caz avem următoarele relații:

$$K_1 = 0; \quad K_2 = \tau\sqrt{a}$$

$$S = a_{22}K_2^2 = a_{22}\tau^2 a = \frac{\tau^2 a}{16G^*} [(k+1)(1-\cos\theta) + (1+\cos\theta)(3\cos\theta-1)]$$

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \rightarrow \sin\theta[(k-1) + 6\cos\theta] = 0$$

ultima ecuație fiind satisfăcută pentru $\theta=0$ sau $\theta = -\arccos\frac{k-1}{6}$ și ca urmare S_{\min} se obține pentru $\theta \neq 0$. În aceste condiții, unghiul sub care se va propaga fisura depinde de ν prin intermediul lui k .

Pentru starea plană de deformății avem $k=3-4\nu$ și atunci:

$$\nu = 0,1 \rightarrow \theta = -74,5^\circ$$

$$\nu = 0,2 \rightarrow \theta = -78,5^\circ$$

$$\nu = 0,3 \rightarrow \theta = -82,3^\circ$$

$$\nu = 0,5 \rightarrow \theta = -90^\circ$$

Propagarea unei fisuri solicate în modul mixt, figura 8.9

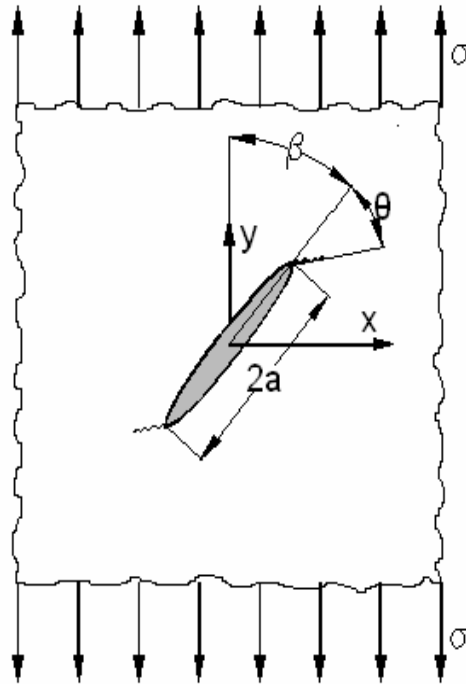


Fig. 8.9. Solicitarea în modul mixt

În acest caz avem următoarele relații:

$$K_1 = \sigma\sqrt{a} \sin^2 \beta$$

$$K_2 = \sigma\sqrt{a} \sin \beta \cos \beta$$

$$S = \sigma^2 a (a_{11} \sin^2 \beta + 2a_{12} \sin \beta \cos \beta + a_{22} \cos^2 \beta) \sin^2 \beta = \sigma^2 a f(\beta, \theta)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \rightarrow (k-1)\sin(\theta-2\beta) - 2\sin[2(\theta-\beta)] - \sin 2\theta = 0$$

cu $\beta \neq 0$ și θ funcție de ν și $S_{\min} = \sigma^2 \cdot a \cdot f(\beta, \theta)$.

În *figura 8.10* este prezentată variația lui θ funcție de β pentru diferite valori ale lui ν .

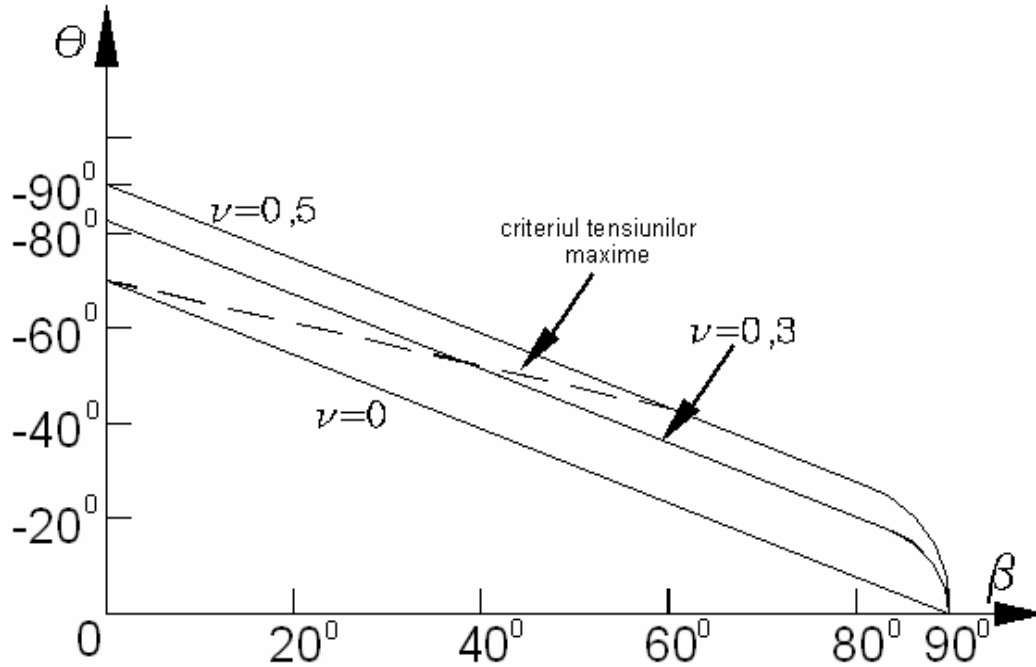


Fig. 8.10 Variația lui θ funcție de β

Dacă se compară criteriul densității energiei cu criteriul tensiunii maxime (Erdogan și Sih) rezultă:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} = 0 \text{ sau } \tau_{r\theta} = 0$$

Înlocuind în relația (8.3) valorile K_1 și K_2 în funcție de β se obține:

$$\sin \theta + (3 \cos \theta - 1) \operatorname{ctg} \beta = 0 \quad (8.18)$$

cu $\beta \neq 0$.

Variația lui θ în funcție de β nu depinde de constantele elastice, așa cum se observă în *figura 8.10*.

Rezultatele experimentale arată că, pentru criteriul densității energiei se obțin valori mai apropiate de realitate decât cele furnizate pe baza criteriului tensiunii maxime. Astfel, cu ajutorul criteriului densității energiei de deformare se poate obține direcția de propagare a fisurii în modul mixt, ceea ce teoria lui Griffith nu poate prevedea. Valoarea critică S_{cr} poate fi utilizată ca un parametru de material pentru măsurarea rezistenței la fisurare, independent de geometria fisurii și de modul de încărcare. Se remarcă faptul că, pe baza acestui criteriu se obține numai unghiul sub care se va propaga fisura, nefiind un criteriu intrinsec de rupere.

Pe baza relației (8.15) se poate obține curba în planul (K_1 , K_2) ce reprezintă curba de siguranță la rupere în modul mixt de sollicitare, *figura 8.11*.

Criteriul tensiunilor maxime conduce la relația (8.4), θ fiind o funcție de β dată prin relația (8.18). Rezultatele experimentale par să indice faptul că, criteriul densității energiei de deformare dă cele mai bune rezultate.

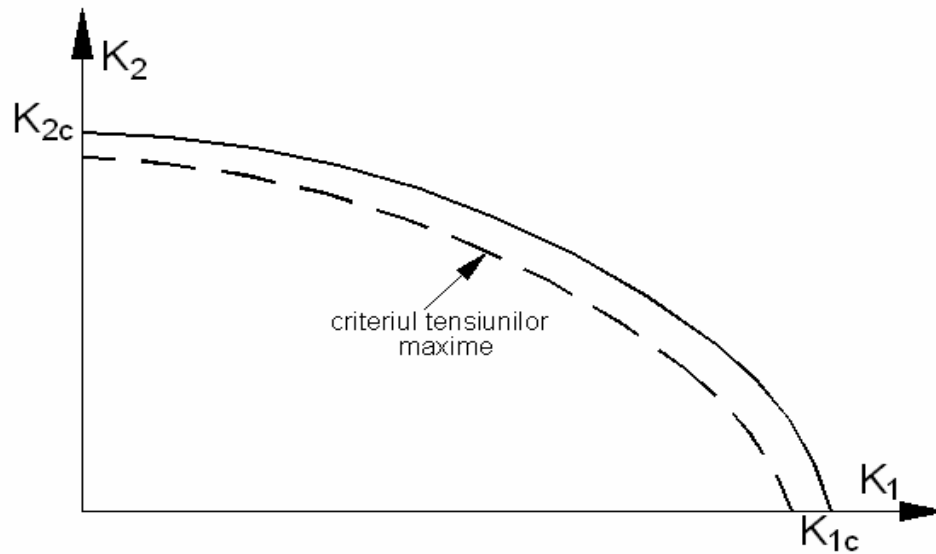


Fig. 8.11. Curba de siguranță la rupere

8.6. Relația între energia liberă și factorul de intensitate a tensiunilor în cazul propagării necoplanare a unei fisuri în modul mixt de solicitare

Relația între energia disponibilă pentru propagarea fisurii, G , și factorul de intensitate a tensiunilor, în cazul în care fisura se propagă în planul său, este de forma:

$$G = \frac{k+1}{8G^*} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G^*} K_{III}^2 \quad (8.19)$$

Considerăm o fisură cu o extindere de lungime c într-un plan înclinat în raport cu planul inițial al fisurii, figura 8.12.

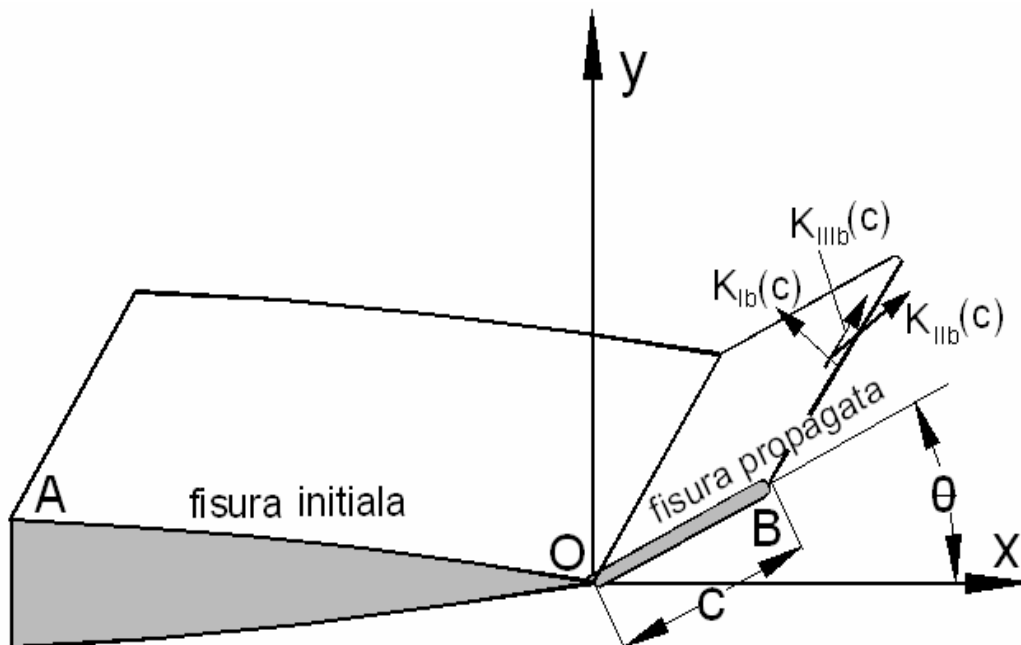


Fig. 8.12. Propagarea fisurii după un plan oarecare

Fie $W(c)$ energia de deformare a fisurii deviate și $W(0)$ energia de deformare pentru fisura dreaptă AO. Presupunând că $W(c)$ este continuă, energia eliberată G corespunde inițierii unei deschideri Δc la extremitatea fisurii drepte AO și este dată prin:

$$G = \lim_{\Delta c \rightarrow 0} \frac{W(\Delta c) - W(0)}{\Delta c} = \left(\frac{\partial W}{\partial c} \right)_{c=0} \quad (8.20)$$

Cantitatea de energie eliberată $G_b(c)$ pentru propagarea cu lungimea c este egală cu:

$$G_b(c) = \lim_{\Delta c \rightarrow 0} \frac{W(c + \Delta c) - W(c)}{\Delta c} = \left(\frac{\partial W}{\partial c} \right) \quad (8.21)$$

Curba $W(c)$ fiind continuă avem:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial c} \right)_{c=0} = \lim_{c \rightarrow 0} \left(\frac{\partial W}{\partial c} \right) \quad (8.22)$$

și

$$G = \lim_{c \rightarrow 0} G_b(c) \quad (8.23)$$

Termenul $G_b(c)$ poate fi exprimat în funcție de factorii de intensitate a tensiunilor $K_{Ib}(c)$, $K_{IIb}(c)$ și $K_{IIIb}(c)$ la extremitatea fisurii propagate:

$$G_b(c) = \frac{k+1}{8G^*} (K_{Ib}^2(c) + K_{IIb}^2(c)) + \frac{1}{2G^*} K_{IIIb}^2(c) \quad (8.24)$$

Înlocuind relația (8.24) în relația (8.22) se obține:

$$G = \frac{k+1}{8G^*} \left(\tilde{K}_{Ib}^2 + \tilde{K}_{IIb}^2 \right) + \frac{1}{2G^*} \tilde{K}_{IIIb}^2 \quad (8.25)$$

$$\tilde{K}_{Ib} = \lim_{c \rightarrow 0} K_{Ib}(c)$$

cu

$$\tilde{K}_{IIb} = \lim_{c \rightarrow 0} K_{IIb}(c)$$

$$\tilde{K}_{IIIb} = \lim_{c \rightarrow 0} K_{IIIb}(c)$$

factori de intensitate a tensiunii la extremitatea propagării infinitezimale:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{Ib} &= K_{11}(\theta)K_I + K_{12}(\theta)K_{II} \\ \tilde{K}_{IIb} &= K_{21}(\theta)K_I + K_{22}(\theta)K_{II} \end{aligned} \quad (8.26)$$

$$\tilde{K}_{IIIb} = \left(\frac{\pi - \theta}{\pi + \theta} \right)^{\frac{\theta}{2\pi}} K_{III}$$

$K_{ij}(\theta)$ = funcții de unghiul θ .

8.7. Generalizarea conceptului de tenacitate la rupere a materialelor fragile supuse tensiunilor multiaxiale

Se poate reprezenta tenacitatea la rupere într-un sistem de axe triortogonal $K_1 K_2 K_3$, *figura 8.13*, printr-un înveliș de rupere caracteristic materialului a cărei ecuație este determinată de tenacitatea în *modul I*, K_{Ic} , și de coeficientul lui Poisson ν . Acest înveliș de rupere are forma unui elipsoid cu ecuația:

$$\left(\frac{K_1 + m}{a}\right)^2 + \left(\frac{K_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{K_3}{c}\right)^2 = 1 \quad (8.27)$$

cu

$$a = K_{Ic} + m$$

$$b = (K_{Ic} + m) \left[\frac{3(1-2\nu)K_{Ic}}{(2-2\nu-\nu^2)(K_{Ic} + 2m)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$c = (K_{Ic} + m) \left[\frac{(1-2\nu)}{K_{Ic} + 2m} K_{Ic} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$m = -\frac{1}{2} \frac{4\nu(2-2\nu-\nu^2) - 3(1-\nu) \left[1 - \frac{(1-2\nu)^3}{(1-\nu)^2} \right]}{4\nu(2-2\nu-\nu^2) - 3(1-\nu) \left[1 - \frac{(1-2\nu)^{\frac{3}{2}}}{(1-\nu)} \right]} K_{Ic}$$

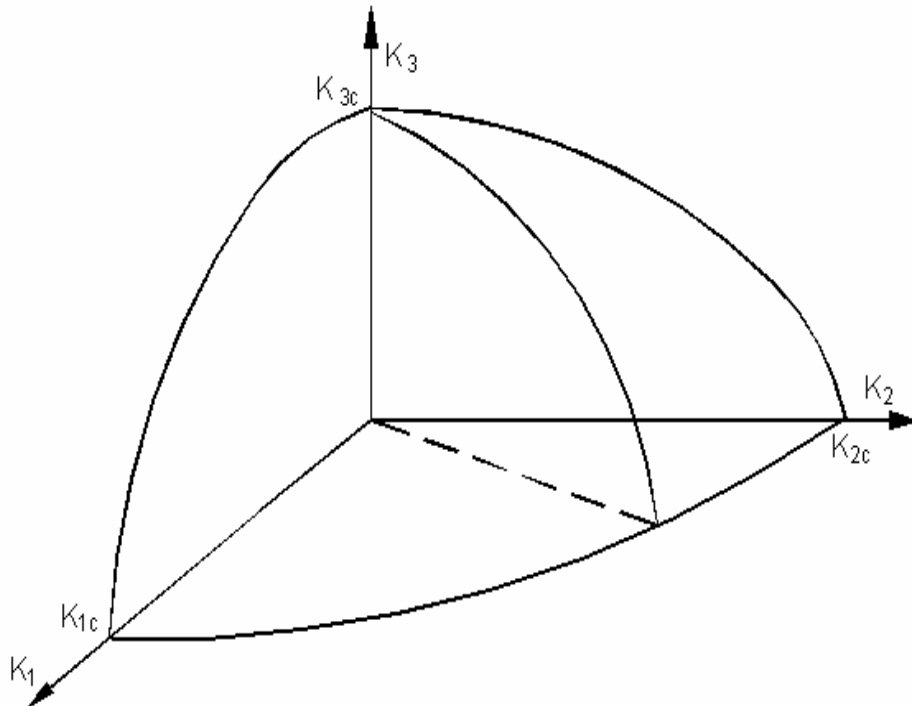


Fig. 8.13. Tenacitatea la rupere în sistemul de axe triortogonal $K_1 K_2 K_3$

Propagarea fisurii se produce dacă:

$$\left(\frac{K_1 + m}{a}\right)^2 + \left(\frac{K_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{K_3}{c}\right)^2 \geq 1$$

In modul II,

$$K_{2c} = \left[\frac{3(1-2\nu)}{(2-2\nu-\nu^2)} \right]^{\frac{1}{2}} K_{Ic}$$

In modul III,

$$K_{3c} = (1-2\nu)^{\frac{1}{2}} K_{Ic}$$