TEMA NR. 7

pagina 1

FORME BILINIARE, FORME LINIARE ȘI FORME PĂTRATICE

Probleme rezolvate

(1) Fie $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2,$$

unde $\vec{x} = (x_1, x_2)$ și $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

a) Să se arate că $\mathcal{A}$ este formă biliniară simetrică.

b) Să se găsească matricea B a formei biliniare $\mathcal{A}$ în baza $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1' = (1,1), \vec{e}_2' = (-1,1)$.

Rezolvare a) $\mathcal{A}$ este formă biliniară simetrică dacă și numai dacă într-o bază $\mathcal{B}$ din $\mathbb{R}^2$ există o matrice simetrică $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ astfel încât să avem

$$\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = X^T A Y,$$

unde X este coloana coordonatelor vectorului $\vec{x}$ în baza $\mathcal{B}$ și Y așișderea (dar în locul lui $\vec{x}$ se pune $\vec{y}$).

Se observă că în baza canonică $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)\}$ în care este definită aplicația $\mathcal{A}$ putem scrie

$$\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = x_1(y_1 - y_2) + x_2(-y_1 + 2y_2) = (x_1 \ x_2)\begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ -y_1 + 2y_2 \end{pmatrix} =$$
$$= (x_1 \ x_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = X^T A Y,$$

deci $\mathcal{A}$ este formă biliniară. Este și simetrică matricea A, deci $\mathcal{A}$ este formă biliniară simetrică.

b) Se știe că $B = C^T A C$ unde C este matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$. Se vede că $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Rezultă $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. În baza $\mathcal{B}'$ forma biliniară $\mathcal{A}$ are expresia $\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = x_1'y_1' + x_1'y_2' + x_2'y_1' + 5x_2'y_2'$ unde $\vec{x} = (x_1', x_2')_{\mathcal{B}'}$ și $\vec{y} = (y_1', y_2')_{\mathcal{B}'}$. VERIFICAȚI REZULTATUL PE ALTĂ CALE!

TEMA NR. 7

pagina 2

(2) Se consideră funcția (aplicația) reală de două variabile vectoriale $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{A}(\vec{x},\vec{y}) = x_1 y_2 + 2x_1 y_3 - x_3 y_1 + 3x_3 y_3,$$

unde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ și $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

a) Să se arate că $\mathcal{A}$ este formă biliniară care nu este simetrică.

b) Să se determine matricea B a formei biliniare $\mathcal{A}$ în baza

$$W = \{ \vec{w}_1 = (1, 2, -1),\ \vec{w}_2 = (-1, 1, 0),\ \vec{w}_3 = (1, 1, 1) \} \subset \mathbb{R}^3.$$

Rezolvare a) Se procedează ca la exercițiul precedent și deducem că $\mathcal{A}(\vec{x},\vec{y}) = X^T A Y$, unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Avem că A este matricea lui $\mathcal{A}$ în baza canonică $\mathcal{B} = \{ \vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1) \}$ din $\mathbb{R}^3$. Vectorii $\vec{x}$ și $\vec{y}$ se exprimă prin

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = \vec{e} X, \text{ unde } \vec{e} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$$

$$\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3 = \vec{e} Y.$$

b) Matricea de trecere C de la baza $\mathcal{B}$ la baza W este $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se știe că $B = C^T A C$.

Efectuând produsele de matrice (TEMA!), găsim

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, $\mathcal{A}$ se exprimă în baza W astfel:

$$\mathcal{A}(\vec{x},\vec{y}) = 4x_1' y_1' + x_1' y_3' - x_2' y_2' - 3x_2' y_3' - 4x_3' y_1' + 2x_3' y_2' + 5x_3' y_3'.$$

VERIFICAȚI! ultimul rezultat înlocuind în expresia lui $\mathcal{A}$ în baza canonică pe $X = CX'$ și $Y = CY'$, iar aceste egalități se fie scrise pe elemente: $x_1 = x_1' - x_2' + x_3'$, $x_2 = 2x_1' + x_2' + x_3'$, ...

TEMA NR. 7

pagina 3

(3) Fie forma pătratică $P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin
$$P(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3, \quad \forall \vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$$

a) Să se afle forma biliniară simetrică din care provine P.

b) Să se aducă P la expresia canonică prin metoda lui Gauss determinându-se și baza corespunzătoare.

Rezolvare. Se observă că $P(\vec{x}) = X^T A X$ unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Forma biliniară simetrică $\mathcal{A}$ de unde provine P este atunci $\mathcal{A}(\vec{x},\vec{y}) = X^T A Y =$
$$= x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1.$$
Se observă că $\mathcal{A}$ se obține prin procedeul de dedublare aplicat lui P.

b) Efectuăm pătrat cu termenii ce conțin x_3, pentru că pare mai simplu. În cele din urmă, găsim
$$\mathcal{A}(\vec{x},\vec{y}) = (3x_1 + x_3)^2 + 2\left(\tfrac{1}{2}x_1 - x_2\right)^2 - \tfrac{17}{2}x_1^2.$$

Notăm
$$(*)\begin{cases} y_1 = 3x_1 + x_3 \\ y_2 = \tfrac{1}{2}x_1 - x_2 \\ y_3 = x_1 \end{cases}$$
Atunci: $P(\vec{x}) = y_1^2 + 2y_2^2 - \frac{17}{2}y_3^2$

unde y_1, y_2, y_3 ~~sunt~~ sunt coordonatele lui $\vec{x}$ într-o bază B' pe care putem să o determinăm căci știm inversa matricei C de trecere de la baza canonică $B\subset\mathbb{R}^3$ la baza B'. Din $(*)$ se vede că
$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Ca să găsim C rezolvăm $(*)$ în necunoscutele x_1, x_2, x_3. Avem
$$\begin{cases} x_1 = y_3 \\ x_2 = -y_2 + \tfrac{1}{2}y_3 \\ x_3 = y_1 - 3y_3 \end{cases} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
deci $B' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ și $\vec{f}_1 = \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_2$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$.

TEMA NR. 7

pagina 4

(4) Să se determine o formă liniară în $\mathbb{R}^3$, neidentic nulă, așa fel încât $f(\vec{u}_1)=0$, $f(\vec{u}_2)=3$ și $f(\vec{u}_3)=-2$, unde $\vec{u}_1=(1,0,1)$ $\vec{u}_2=(1,-1,0)$; și $\vec{u}_3=(-1,0,2)$.

Rezolvare O formă liniară este un operator liniar în care $m=1$, iar $V=\mathbb{K}$. Așadar aplicația $f: U \longrightarrow \mathbb{K}$, unde U este spațiu liniar peste câmpul $\mathbb{K}$, este formă liniară în (pe) $\mathbb{R}^3$ dacă f este aditivă și omogenă sau mai general, $f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha f(\vec{x})+\beta f(\vec{y})$, $\forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{K}$, $\forall\, \vec{x},\vec{y}\in U$.

Folosind rezultatul stabilit pentru operatori liniari (vezi TEMA NR. 5, problema (1)) deducem că f este formă liniară dacă

$$f(\vec{x})=AX, \quad \text{unde } A\in\mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{K})$$

iar X este matricea coloană a coordonatelor vectorului $\vec{x}$ într-o bază $\mathcal{B}$. Avem că

$$A=(a_1\ \ a_2\ \dots\ a_n)$$

Evident $a_1=f(\vec{e}_1)$, $a_2=f(\vec{e}_2)$, ..., $a_n=f(\vec{e}_n)$, unde $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n\}=\mathcal{B}$.

Din datele problemei rezultă

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_3)=0 \\ f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_2) = 3 \\ -f(\vec{e}_1) + 2f(\vec{e}_3)=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\vec{e}_1)=a_1=\frac{2}{3} \\ f(\vec{e}_2)=a_2=-\frac{7}{3} \\ f(\vec{e}_3)=-\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Prin urmare, $f(\vec{x})=\frac{2}{3}x_1-\frac{7}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3$.

Precizare. Numerele a_1, a_2, a_3 se numesc coeficienții formei f în baza $\mathcal{B}$.

(5) Ce coeficienți are forma pătratică de la punctul precedent în baza $\mathcal{B}'$ știind că matricea C de trecere de la baza canonică $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$ este

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ ?$$

Rezolvare Particularizăm formula $B = L^{-1}AM$ unde, în cazul nostru $L = 1$, deci $L^{-1} = 1$, iar $M = C$.

Notând $B = (b_1\ b_2\ b_3) \Rightarrow B = (a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \left(\frac{2}{3}\ -\frac{7}{3}\ -\frac{2}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \left(0\ \ \frac{7}{3}\ -\frac{2}{3}\right)$. Așadar,

$P(\vec{x}) = \frac{7}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2$, unde y_1, y_2, y_3 sunt coordonatele lui $\vec{x}$ în baza nouă.

(6) Fie $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrice din $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$.

Să se găsească forma liniară $f : \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(X_1) = -3,\quad f(X_2) = 0,\quad f(X_3) = -5,\quad f(X_4) = 2.$$

Să se determine apoi dimensiunea și o bază a subspațiului $\{X \mid f(X) = 0\} \subset \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}^3)$.

Rezolvare O bază $\mathcal{B}$ (care ar putea fi numită canonică) în $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ este formată din matricele

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Atunci:

$$X_1 = E_{12} + E_{21} + E_{22} = (0, 1, 1, 1)_{\mathcal{B}}$$

$$X_2 = E_{11} + E_{21} + E_{22} = (1, 0, 1, 1)_{\mathcal{B}}$$

$$X_3 = E_{11} + E_{12} + E_{22} = (1, 1, 0, 1)_{\mathcal{B}}$$

$$X_4 = E_{11} + E_{12} + E_{21} = (1, 1, 1, 0)_{\mathcal{B}}$$

TEMA NR. 7

pagina 6

Forma liniară $f: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ are, în baza $\mathcal{B}$, expresia

$$f(X) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4\text{, unde:}$$

$$a_1 = f(E_{11}),\quad a_2 = f(E_{12}),\quad a_3 = f(E_{21}),\quad a_4 = f(E_{22});$$

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4)_{\mathcal{B}} = x_1 E_{11} + x_2 E_{12} + x_3 E_{21} + x_4 E_{22}$$

Impunând condițiile din enunț, obținem sistemul

$$\begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 = -3 \\ a_1 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_4 = -5 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 2 \end{cases}$$

Adunând ecuațiile, găsim $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -2$. Folosind acest rezultat în fiecare dintre ecuațiile sistemului, găsim $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, $a_3 = 3$, $a_4 = -4$. Prin urmare: $f(X) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4$.

Subspațiul din enunț este $\operatorname{Ker} f$, adică nucleul formei liniare f. Din $f(X) = 0 \Rightarrow$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \iff$$

$$x_1 = 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$$

O soluție oarecare X din $\operatorname{Ker} f$ are forma

$$X = (2x_2 - 3x_3 + 4x_4,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$$

Se vede că $X = x_2(2,1,0,0) + x_3(-3,0,1,0) + x_4(4,0,0,1) = x_2 V_1 + x_3 V_2 + x_4 V_3$.

Vectorii V_1, V_2, V_3 sunt liniar independenți (demonstrați!)

Deci $\dim \operatorname{Ker} f = 3$, iar o bază în $\operatorname{Ker} f$ este $\mathcal{B}' = \{V_1, V_2, V_3\}$. Evident că pt V_1, V_2, V_3 putem scrie $V_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $V_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $V_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

TEMA NR. 7

(7) Se dă forma biliniară $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, a cărei matrice în baza canonică $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ este

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Să se scrie expresia analitică a formei g în baza $\mathcal{B}$.

2) Să se arate că g este simetrică.

3) Să se găsească matricea G' a formei g în baza $\mathcal{B}' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, unde

$$\vec{f}_1 = (1,1,1),\ \vec{f}_2 = (1,2,1),\ \vec{f}_3 = (0,0,1).$$

Rezolvare. 1) Evident: $g(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_2 + 2x_2 y_3 - x_3 y_1 + 2 x_3 y_2$.

2) g este simetrică pt că $G = G^T$.

3) $B = C^T G C$, unde $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(8) Să se scrie formele pătratice asociate formelor biliniare simetrice:

1) $\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + 2x_1 y_2 + 2 x_2 y_1 + x_1 y_3 + x_3 y_1$

2) $\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2$

Rezolvare. Forma pătratică P asociată lui $\mathcal{A}$ este dată de $P(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}, \vec{x}) \Rightarrow$

1) $P(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1 x_2 + 2x_1 x_3$

2) $P(\vec{x}) = 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3$.

TEMA NR. 7

pagina 8

(9) Utilizând metoda lui Jacobi să se determine expresia canonică și baza corespunzătoare a formei pătratice

$$P(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

unde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Rezolvare. Matricea A a lui P în baza canonică $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinanții lui Sylvester sunt $\Delta_1 = 1$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta_3 = \det A = -7.$$

Conform metodei lui Jacobi, există o bază $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$ în care P are expresia canonică

$$P(\vec{x}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} x_3'^2,$$

unde Δ_0 este prin definiție 1 iar $\vec{x} = x_1'\vec{e}_1{}' + x_2'\vec{e}_2{}' + x_3'\vec{e}_3{}'$.

Fie C matricea de trecere de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$. Se știe că C este triunghiulară superior

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}. \text{ Deci}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_1{}' = c_{11}\vec{e}_1 \\ \vec{e}_2{}' = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 \\ \vec{e}_3{}' = c_{13}\vec{e}_1 + c_{23}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3. \end{cases}$$

Elementele lui C se determină din condițiile: $\mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_1{}') = 1$; $\begin{cases} \mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_2{}') = 0 \\ \mathcal{A}(\vec{e}_2, \vec{e}_2{}') = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} \mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_3{}') = 0 \\ \mathcal{A}(\vec{e}_2, \vec{e}_3{}') = 0 \\ \mathcal{A}(\vec{e}_3, \vec{e}_3{}') = 1 \end{cases} \Rightarrow$

TEMA NR. 7

$$\Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 3/7 \\ 0 & -1/3 & -1/7 \\ 0 & 0 & -1/7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2' = \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = \frac{3}{7}\vec{e}_1 - \frac{1}{7}\vec{e}_2 - \frac{1}{7}\vec{e}_3 . \end{cases}$$

(10) Să se determine rangul r, indicii de inerție p (numărul pătratelor pozitive dintr-o expresie canonică) și q (— " — negative — " —) și să se precizeze natura formelor pătratice

1) $P(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$
2) $P(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2$
3) $P(\vec{x}) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 10x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$
4) $P(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.

Rezolvare Pentru a răspunde cerințelor problemei trebuie să aducem fiecare formă pătratică la o expresie canonică printr-o metodă cunoscută (metoda lui Gauss, metoda valorilor și vectorilor proprii, metoda lui Jacobi). Avem:

1) $P(\vec{x}) \overset{\text{Gauss}}{=} x_1^2 + x_2^2 + (x_2+x_3)^2 \Rightarrow r=3,\ p=3,\ q=0$ și forma pătratică este nedegenerată și pozitiv definită.

2) $P(\vec{x}) \overset{\text{Gauss}}{=} (x_1+x_3)^2 + 2x_2^2 \Rightarrow r=2,\ p=2,\ q=0$ și forma pătratică se numește pozitiv semidefinită. Este degenerată deoarece $r<3$ (dimensiunea $\mathbb{R}^3$).

3) Aplicăm Jacobi: $\Delta_1 = 7>0$, $\Delta_2 = 48>0$, $\Delta_3 = 432>0$ $\Rightarrow r=3,\ p=3;\ q=0$ - formă pătr. pozitiv definită.

4) Jacobi $\Rightarrow \Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = -3,\ \Delta_3 = -27 \Rightarrow r=3,\ p=2,$ $q=1$ și forma $P(\vec{x})$ este nedefinită și, desigur, nedegenerată pentru că $r=3$.

TEMA NR. 7

Probleme propuse

(1). Se dă forma biliniară $\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 - x_1 y_2 + 3 x_2 y_1 + 2 x_2 y_2 - x_3 y_3$, unde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ și $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

a) Să se scrie matricea A a lui $\mathcal{A}$ în baza canonică $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$ din $\mathbb{R}^3$.

b) Să se determine matricea B a lui $\mathcal{A}$ în baza $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{f}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\}$. și expresia lui $\mathcal{A}$ în această bază.

<u>Răspuns</u>. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B = C^T A C$, unde $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = 5x_1' y_1' + x_1' y_2' + 5 x_1' y_3' + 5 x_2' y_1' + x_2' y_2' + 4 x_2' y_3' + 5 x_3' y_1' + 4 x_3' y_3'.$$

(2). Se dă forma pătratică $P(\vec{x}) = 2x_1 x_2 - 6x_1 x_3 - 6x_2 x_3$ unde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Să se determine: matricea A în baza uzuală $\mathcal{B}$; expresia canonică prin metoda lui Gauss; baza canonică $\mathcal{B}'$ corespunzătoare; matricea A' în baza canonică; rangul și natura lui P.

<u>Răspuns</u> După ce se face schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

forma P devine $P(\vec{x}) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 12 y_1 y_3 = 2(y_1^2 - 6 y_1 y_3) - 2y_2^2 = 2(y_1 - 3y_3)^2 - 18 y_3^2 - 2y_2^2$

$\Rightarrow P(\vec{x}) = 2(y_1 - 3y_3)^2 - 2y_2^2 - 18 y_3^2$. ...

TEMA NR. 7

(3) Să se găsească formele liniare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, pentru care

$$f(0,1,-1) = 0, \quad f(-2,1,1) = 0.$$

Răspuns. $f(\vec{x}) = \alpha(x_1 + x_2 + x_3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(4) Se dă forma biliniară $A : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$,

$$A(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 + x_2y_3 + x_2y_4 + 2x_3y_1 + x_3y_3 - 2x_4y_1 + x_4y_2$$

Să se arate că mulțimea de vectori din $\mathbb{R}^4$

$$S = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^4 \mid A(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^4\}$$

este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^4$ numit subspațiul nul al lui A relativ la al doilea argument.

Să se determine o bază și dimensiunea acestui subspațiu.

Indicație. $A(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^4$ implică $\begin{cases} 4y_1 - 2y_2 = 0 \\ y_3 + y_4 = 0 \\ 2y_1 + y_3 = 0 \\ -2y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$

Răspuns. S este subspațiul generat de vectorul $\vec{v} = (1, 2, -2, 2)$, deci $\{\vec{v}\}$ bază în S și $\dim S = 1$.

(5) Utilizând metoda lui Jacobi să se determine expresia canonică și baza corespunzătoare pentru forma pătratică $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$P(\vec{x}) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2^2 + 4x_3^2.$$

Răspuns. $P(\vec{x}) = \dfrac{\Delta_0}{\Delta_1} y_1^2 + \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \dfrac{\Delta_2}{\Delta_3} y_3^2$, unde:

$\Delta_0 = 1$; $\Delta_1 = 5$; $\Delta_2 = 26$; $\Delta_3 = 80$. Baza are matricea de trecere

$$C = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/13 & 3/20 \\ 0 & 5/26 & 1/20 \\ 0 & 0 & 13/40 \end{pmatrix}.$$

Vezi problema rezolvată asemănătoare din această temă!